Lycée Galilée Gennevilliers

La Gravitation universelle de Newton

chap. 9

Jallu Laurent

La gravitation universelle de Newton
Du Cosmos à l'Univers …

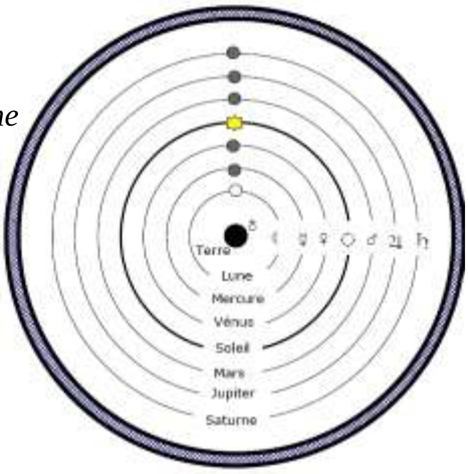
I. De Kepler à Newton …

*D'après un article du « **Bulletin de l'Union des Physiciens** », N°**858**(1), **Novembre 2003** de Bernard **LAHAYE,** Maître de conférence retraité (physique), Membre de l'ASNORA (Association normande d'astronomie), Caen (Calvados)*
Dans toute la suite, les termes en italiques sont ceux de Newton même, après traduction dont l'orthographe a été respectée

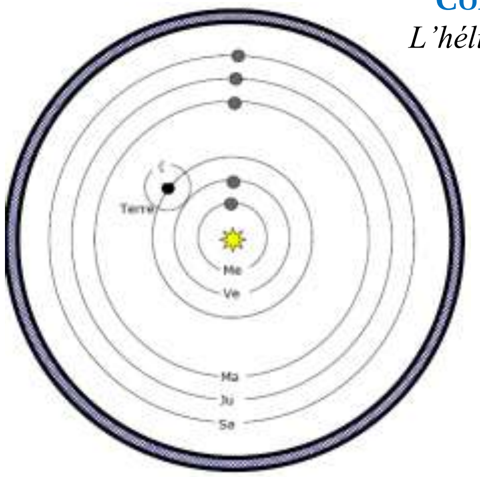
- **La génèse de la loi de gravitation universelle : Hasard et « histoires »**

Depuis l'Antiquité jusqu'à Nicolas **COPERNIC** (1473-1543) compris, tout le monde affirmait que les planètes étaient animées de mouvements circulaires uniformes, les cieux étaient « parfaits » et le cercle, la courbe « parfaite » Mais, fait nouveau - encore que **PYTHAGORE** (v 582-500 av. J.-C) et **ARISTARQUE** (v 310-230 av. J.-C.) l'aient devancé, mais sans succès - Copernic fait du Soleil 1e centre immobile de l'Univers : il ose enfin publier ses idées quelques jours avant sa mort. Il attribue trois mouvements à la Terre : une rotation diurne sur son axe, une orbite annuelle autour du Soleil, une giration de son axe pour rendre compte de la précession des équinoxes.

ARISTOTE, PTOLÉMÉ :
Le géocentrisme

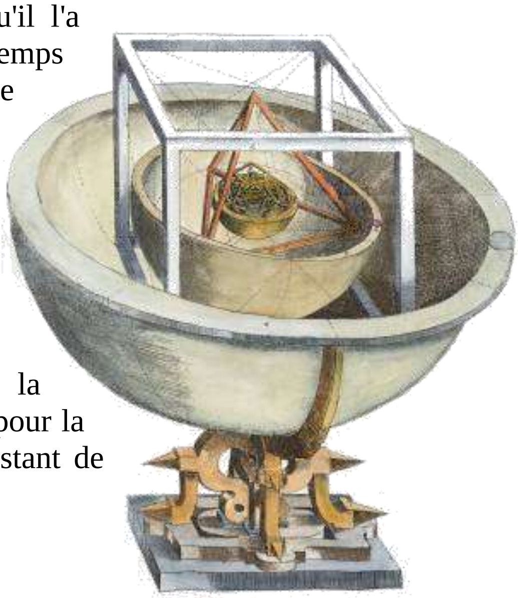


COPERNIC :
L'héliocentrisme



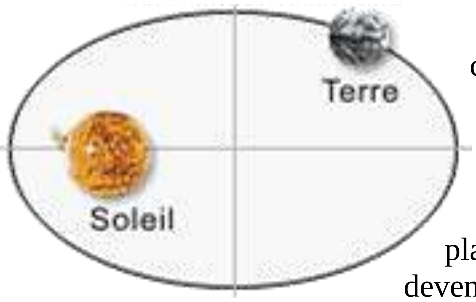

KEPLER

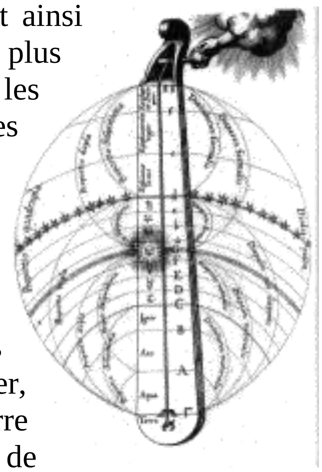
Fini le géocentrisme **d'ARISTOTE** (384-322 av. J.-C.) - qui connaissait pourtant l'héliocentrisme puisqu'il l'a combattu - géocentrisme imposé encore du temps de **PTOLÉMÉE** (v 100-170) comme seule règle de vérité par l'Église. Cependant, pour **COPERNIC**, les mouvements des planètes, qualifiés de « naturels » restent circulaires et uniformes, et les astres n'interagissent pas.



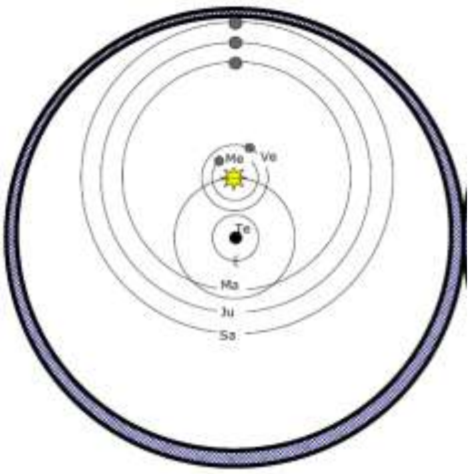
KEPLER, protestant et défenseur de la théorie copernicienne, fut victime de ses convictions. Par chance - pour la science - c'est grâce à ces persécutions qu'il devint en 1600 l'assistant de

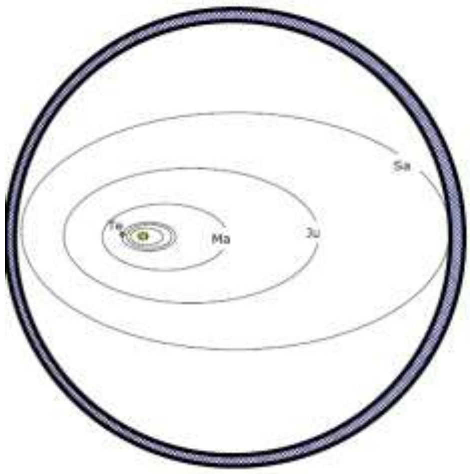
Tycho Brahé (mort en 1601), lui-même « exilé » à Prague. Il put ainsi accéder aux résultats des observations de son maître - de loin les plus précises jamais réalisées à l'œil nu - et, alors qu'il recherchait dans les phénomènes astronomiques des rapports harmoniques analogues à ceux de la musique (il connaissait la gamme de Pythagore) il découvrit - du fait, au départ, que Mars dérogeait au système de Copernic - trois lois relatives au mouvement des planètes. Ces trois lois de Kepler, devenues célèbres, posent la première pierre de la théorie de la gravitation universelle, surtout si l'on ajoute à l'actif de ce calculateur infatigable, sa conception de la gravité, considérée comme force agissant à distance. Pour représenter les mouvements des six planètes connues à l'époque et de la Lune, le système de **Kepler** - il ne peut être plus simple - ne nécessite plus que sept ellipses (au lieu des 80 cercles de **Ptolémée** et des 34 encore de **Copernic**).





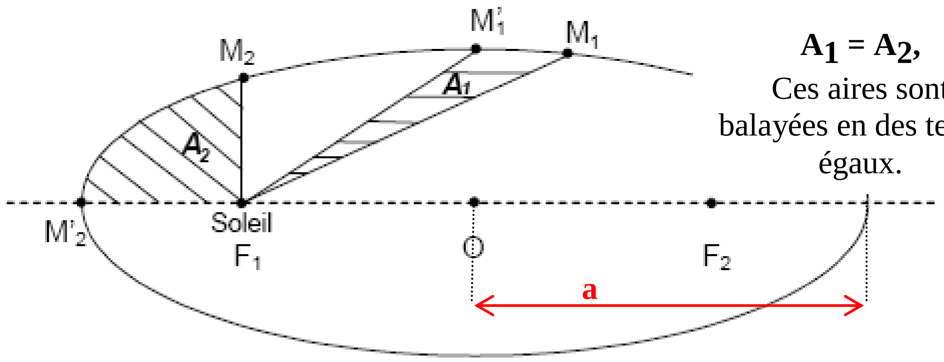
Tycho Brahé:
Système mixte





Kepler, Newton :
L'héliocentrisme

- *Première loi (1609) :* les planètes décrivent (dans le sens direct) des orbites en forme d'ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers.



$A_1 = A_2$,
Ces aires sont balayées en des temps égaux.

- *Deuxième loi (1609), dite loi des aires* pendant des durées égales, le rayon vecteur joignant le soleil à la planète balaie des aires égales.

Conséquence : la vitesse de la planète est maximale lors de son passage au périhélie et minimale lors de son passage à l'aphélie.

- *Troisième loi (1619) : si T est la durée de révolution d'une planète et a la longueur du demi grand axe de son orbite, le rapport T^2 / a^3 est indépendant de la planète.*

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{Cste}$$

Partant du fait que plus une planète est éloignée du Soleil, plus longue est son « année », Kepler a peiné des années avant d'en arriver là.

Remarque : Un cercle peut être considéré comme une ellipse particulière (a = r).

GALILÉE introduit dans ses recherches une méthode à 1a fois mathématique (géométrique) et empirique. Il trouve deux lois du mouvement, donnant l'espace x parcouru pendant la durée t :

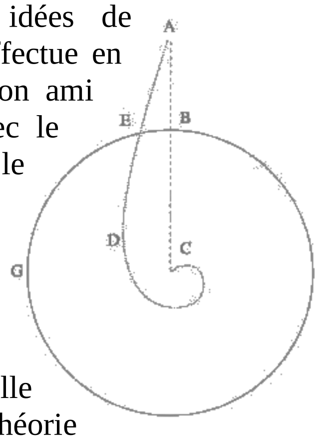
- Mouvement rectiligne uniforme : $x = v_o\, t$ à vitesse v_o constante ①
- Mouvement uniformément accéléré : $x = {}^1/_2\, a_o\, t^2$ à accélération a_o constante ②

La seconde, découverte lors d'expériences de roulement d'une sphère le long d'un plan incliné, l'accélération étant imputée à la pesanteur. Il découvre également que, dans le vide, tous les corps (premier caractère universel) tombent avec la même vitesse, chutant de 4,9 m durant la première seconde, d'où $a_o = g = 9{,}8$ m/s/s

Christian **HUYGENS** (1629-1695) qui est passé à côté de la découverte de la force de gravitation, centripète et variant comme m/r^2, même si cela eût été dans un cas particulier. Cet amateur - hollandais mais membre associé de l'Académie royale des Sciences - étudiant les oscillations du pendule, publia en effet, en 1673, qu'une force centripète f était requise pour garder à un corps son mouvement circulaire uniforme (c'est presque le cas des planètes), celui-ci n'étant donc plus « naturel ». Soient r le rayon du cercle, m la masse du corps, ω la vitesse angulaire ; **HUYGENS** a trouvé que : $f = m.\omega^2.r$

Or, $$f = m.\omega^2.r = m\,.\left(\frac{2\Pi}{T}\right)^2.r = m.4\frac{\Pi^2}{T^2}\,.\,r = \frac{m}{r^2}.\left(4\Pi^2.\left[\frac{r^3}{T^2}\right]\right) = \text{Cste}\,.\left(\frac{m}{r^2}\right).$$

Pourquoi **HUYGENS** n'a-t-il pas effectué ce calcul ? Peut-être n'y a-t-il pas pensé … sous l'emprise cartésienne, fort influente à cette époque avec ses tourbillons entraînant les planètes, **HUYGENS** ne portait aucune attention à la force de gravitation en tant qu'action à distance et dans le vide (dont **DESCARTES** niait l'existence).



D'ailleurs, **NEWTON** lui-même, au début, adhérait aux idées de **DESCARTES**. Une preuve : il « démontre » que la chute libre s'effectue en forme de spirale. Démonstration incorrecte, lui fait remarquer son ami Robert **HOOKE** (1635-1703), touche-à-tout génial lui aussi. Avec le jeune Edmund **HALLEY** (1656-1742), il a sans aucun doute déjà fait le petit calcul ci-dessus ... mais il ne l'a pas publié. Omission fatale ! ... Furieux de s'être trompé, **NEWTON** abandonne **DESCARTES**, preuves à l'appui - *il est donc certain que les planètes ne sont point transportées par des tourbillons de matière* - et s'approprie (???) les idées de ses amis. Il sera, en tout cas, le premier à publier, bénéficiant seul d'une célébrité elle aussi universelle ... et du titre de Sir. Nous approchons en effet de la naissance de la théorie de la gravitation universelle, mais ce fut un accouchement dans la douleur.

Tous « sèchent » sur le problème ... **HOOKE** écrit à **NEWTON** en 1680 qu'« il reste à connaître la courbe d'un objet qui se déplace, mû par une force centrale attractive qui varie

comme l'inverse du carré de la distance » et il conclut : « Je ne doute pas, qu'avec votre excellente méthode, vous trouverez aisément quelle doit être cette courbe et ses propriétés, et suggérerez une raison physique de cette proportion ». Tout est dit, y compris la méthode. **NEWTON** ne répond pas. Plus tard, il reçoit son grand admirateur **HALLEY** ... Dans sa préface, il écrit : *après avoir obtenu de moi ce que j'avais démontré sur la forme des orbites planétaires, il ne cessa de me prier d'en faire part à la Société Royale, dont les instances et les exhortations gracieuses me déterminèrent à songer à publier quelque chose sur ce sujet. J'y travaillai ...*
Je pensai qu'il était à propos d'en différer l'édition jusques à un autre tems, afin d'avoir le loisir de méditer sur ce qu'il restait à trouver, et de donner un ouvrage complet au public : ce que je fais à présent.

La première édition des « Philosophiae naturalis principia mathematica » parut, en latin, à Londres en juillet 1687, aux frais de ... **HALLEY**, la Royal Society ayant épuisé ses crédits. Et **NEWTON** n'était pas riche. L'ouvrage comporte trois parties, ou « livres » :

- Dans le troisième, après avoir passé en revue les *phénomènes* (mouvements des satellites de Jupiter et de Saturne, puis ceux des planètes et de la Lune), **NEWTON** énonce la loi de la gravitation et l'applique au système du monde.

Mais, bien que son ouvrage soit très mathématique, il donne, au début de ce troisième « livre », quatre règles qu'il faut suivre dans l'étude de la physique et qu'il applique lui-même (voir ci-dessous : **Des lois de KEPLER aux lois de NEWTON**, une preuve ...). Les voici :

- *Règle I : Il ne faut admettre de causes, que celles qui sont nécessaires pour expliquer les phénomènes.*
- *Règle II : Les effets du même genre doivent toujours être attribués, autant qu'il est possible, à la même cause.*
- *Règle III: Les qualités des corps qui ne sont susceptibles ni d'augmentation ni de diminution, & qui appartiennent à tous les corps sur lesquels on peut faire des expériences, doivent être regardées comme appartenantes à tous les corps en général.*
- *Règle IV : Dans la philosophie expérimentale, les propositions tirées par induction des phénomènes doivent être regardées malgré les hypothèses contraires, comme exactement ou à peu près vraies, jusqu'à ce que quelques autres phénomènes les confirment entièrement ou fassent voir qu'elles sont sujettes à des exceptions.* C'est bien ce que nous entendons par « principe », de la dynamique ou autre ... Il laisse également la voie libre à l'arrivée d'une « autre » dynamique ...

Cette publication ne faisant qu'une toute petite référence à **HALLEY**, et à **HOOKE** qui revendiquait la paternité de la loi en $1/r^2$ de la force de gravitation, brouilla à tout jamais les deux hommes! **NEWTON** affirma, plus tard, qu'il avait lui-même eu cette idée dès 1666, ayant fui la grande peste de Londres, et quitté sa chaire de mathématiques à Cambridge pour sa demeure de Woolsthorpe Manor, près de Grantham ... Mais rien ne le prouve !

S'il est certain que **HOOKE** pressentait - sans doute donc avant **NEWTON** - la variation en **$1/r^2$** de cette force, personne ne pouvait, dans le cas d'orbites elliptiques, en faire la démonstration avant Newton car elle nécessite deux nouveautés inventées par Newton et intervenant en permanence (il le précise lui-même) dans ses « Principes », à savoir :

- la loi de la dynamique, $\vec{f} = m.\vec{a}$ (deuxième loi de **NEWTON**, mais préparée par **GALILÉE**) ;
- le calcul des ***fluxions***, méthode mathématique infinitésimale comme le **calcul différentiel** de **LEIBNIZ** ; d'où nouvel affrontement gagnant pour **NEWTON** - devenu président de la Royal Society -, les deux hommes revendiquant chacun la paternité de ces méthodes infinitésimales, bien que la première fût géométrique et la seconde algébrique.

Newton la dit aussi ***méthode des premières et dernières raisons***, employée dans tout cet ouvrage. Au départ des calculs, c'est une sorte de zoom permettant d'évaluer les propriétés de la situation, avant de réduire de plus en plus jusqu'à des grandeurs *évanouissantes* pour que les relations ① et ② ci-dessus - dans lesquelles vitesse ou accélération sont constantes - deviennent justifiées sur chaque petite portion de parcours et que la force devienne appliquée continûment (cf. exemple ci-dessous).

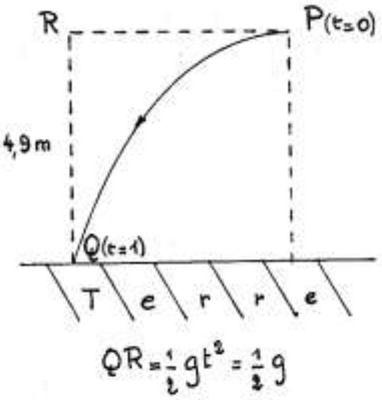


Figure 1a

➢ Les preuves mathématiques

○ Des lois de KEPLER aux lois de NEWTON

Une preuve, simple, de **Newton** : *La Lune gravite vers la Terre, et par la force de la gravité elle est continuellement retirée du mouvement rectiligne et retenue dans son orbite.* Pour lui - il est le premier à le comprendre - cette force est de même nature que celle qui fait tomber un corps au niveau de la Terre *(cf.* figure la).

Il calcule que la Lune « tombe » de QR = 1,36 mm/s. Or, $QR = \frac{1}{2} a_o t^2 = \frac{1}{2} a_o$ pour t = 1 seconde *(cf.* figure lb) ; et, pour son plus grand bonheur, $4{,}9 / 0{,}00136 \approx 60^2$, soit $(r_L / \text{rayon Terre})^2$: cela lui prouve (mais avec une orbite lunaire assimilée à un cercle) que f est non seulement en **$1/r^2$**, mais en **m/r^2**.

Cas des orbites quelconques

- *Un exemple d'utilisation des* ***fluxions***

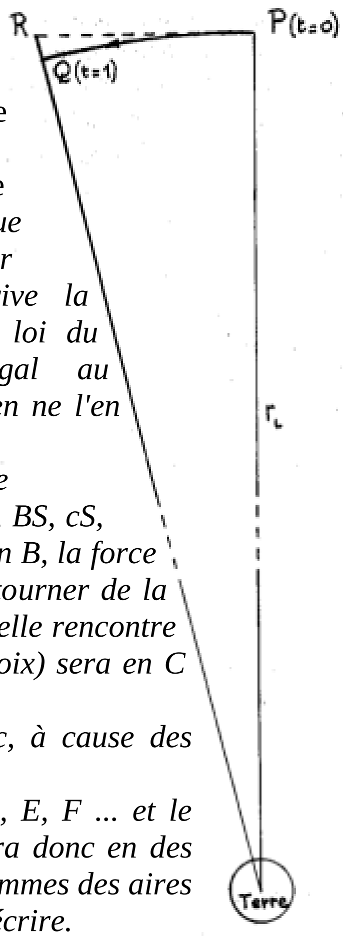


Figure 1b

Il montre ici que, obéissant à l'ensemble de *ses lois*, un corps soumis à une force centripète (en $1/r^2$ ou non mais dirigée vers le centre immobile S), décrit une trajectoire plane et parcourue suivant la loi des aires. En voici le texte : *Supposé que le temps soit divisé en parties égales, et que dans la première partie de ce temps, le corps, par la force qui lui a été imprimée, décrive la ligne AB : suivant la première loi du mouvement dans un second temps égal au premier, il décrirait* (*cf.* figure 2), *si rien ne l'en empêchait, la droite Bc = AB (le* texte note, par *erreur BC au lieu de Bc) ; donc en tirant au centre S, les rayons AS, BS, cS, les aires ASB, BSc seraient égales. Supposé que lorsque ce corps est arrivé en B, la force agisse sur lui par un seul coup, mais assez puissant pour l'obliger à se détourner de la droite Bc et à suivre la droite BC. Si on tire la ligne cC parallèle à BS, laquelle rencontre BC en C, à la fin de ce second temps, le corps (selon le 1. corollaire des loix) sera en C dans le même plan que le triangle ASB.*

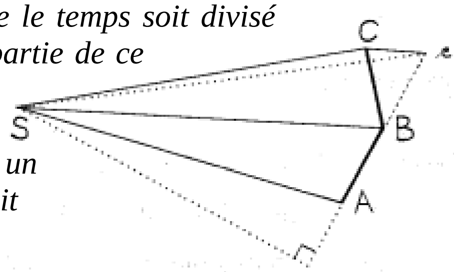


Figure 2

En tirant ensuite la ligne SC, le triangle SBC sera égal au triangle SBc, à cause des parallèles SB, Cc, donc il sera aussi égal au triangle SAB.
De même, si la force centripète agit successivement sur le corps en C, D, E, F ... et le triangle SCD sera égal au triangle SBC ... (cf. figure 3a). *Ce corps décrira donc en des temps égaux des aires égales dans un plan immobile : et en composant, les sommes des aires quelconques SADS, SAFS seront entr'elles comme les temps employés à les décrire.*

Qu'on imagine maintenant que le nombre des triangles augmente (cf. figure 3b) *et que leur largeur diminue à l'infini, il est clair, que leur dernier périmètre ADF sera une ligne* *courbe. Donc la force centripète, qui retire le corps à tout moment de la tangente de cette courbe, agit sans interruption, et les aires quelconques SADS, SAFS, qui étaient proportionnelles aux temps employés à les décrire, leur seront encore proportionnelles dans ce cas. CQFD.*

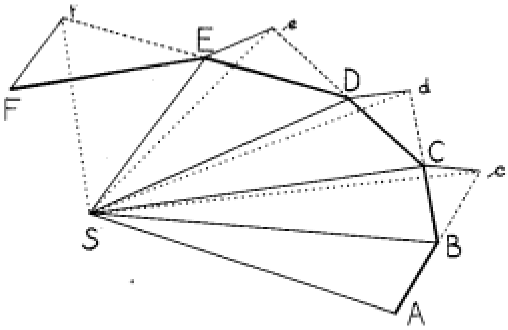


Figure 3a

LA
METHODE
DES
FLUXIONS,
ET DES SUITES INFINIES.
Par M. le Chevalier NEWTON.
A PARIS,
Chez DE BURE l'aîné, Libraire, Quay des Augustins, à Saint Paul.
M. DCC XL.

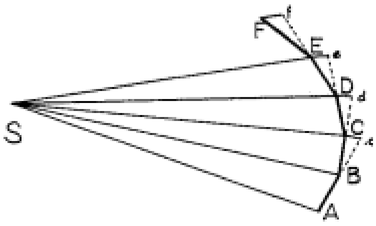


Figure 3b

Vers la loi en $1/r^2$

Newton commence effectivement par montrer que les deux premières lois de Kepler conduisent à une force centripète (dirigée vers S), puis que *la force centripète sera réciproquement comme ce que devient la quantité $SP^2.QT^2/QR$ lorsque les points P et Q coïncident (cf.* figure 4). En effet, le mobile passant de P à Q pendant la durée infiniment petite t, et QR, parallèle à SP, étant le déplacement dû à la force, $QR = \frac{1}{2} a_0 t^2$; de plus, la loi des aires implique que SP.QT / t = Cte. Éliminant t, la force, proportionnelle à a_0, l'est également à l'inverse de la quantité $SP^2.QT^2/QR$.

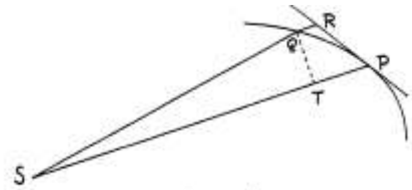


Figure 4

Et enfin, il indique que cette expression générale de la force permet de trouver la loi de la force selon la trajectoire, ce qu'il fait, en particulier pour des trajectoires elliptique, mais également parabolique et hyperbolique, de foyers S. Dans ces trois cas, il trouve une force en **$1/r^2$**.

La loi de la gravitation universelle

Ayant analysé *les phénomènes, il* constate :
Les satellites de Jupiter gravitent vers Jupiter, ceux de Saturne vers Saturne, & les planètes principales vers le Soleil, & c'est par la force de leur gravité que ces corps révolvans sont retirés à tout moment de la ligne droite & qu'ils sont retenus dans des orbites curvilignes.
À partir de là, il décide de ne plus parler de force *centripète* mais de *gravité car la cause de cette force centripète, qui retient la Lune dans son orbite, doit s'étendre à toutes les planettes par les Règles I, II & IV.*

De plus, les lois de Kepler étant indépendantes de la masse des planètes et, sur Terre, la chute libre d'un corps (y compris la Lune) étant indépendante de sa masse, la force de gravitation est nécessairement proportionnelle à cette masse, m. En réalité, la masse qui intervient dans la deuxième loi de Newton étant la **masse d'inertie**, si la force de gravitation est proportionnelle à la **masse grave**, les résultats ci-dessus prouvent que ces deux masses sont proportionnelles entre elles (on les a prises égales par convention). Érigée en **« principe d'équivalence** », cette universalité de la chute libre (ou équivalence des deux masses) sera l'un des fondements de la relativité générale.

De plus, utilisant sa troisième loi, **NEWTON** a ainsi prouvé, sans ambiguïté, que : *La gravité appartient à tous les corps, et elle est proportionnelle à la quantité de matière que chaque corps contient*. D'où, en formulation actuelle :

Deux corps, de masses respectives m et m', situés à la distance r l'un de l'autre, s'attirent avec une force d'intensité $F = G\dfrac{m.m'}{r^2}$, G étant la constante de la gravitation.

Elle ne sera déterminée numériquement que beaucoup plus tard. Preuve de la difficulté, les résultats actuels (2002) ne s'accordent que sur trois chiffres significatifs que voici, dans le système international : $G = 6{,}67...10^{-11}$. **NEWTON** aurait pu s'arrêter là, avec une loi déjà quasi universelle mais ...

La gravitation : théorie explicative et prédictive

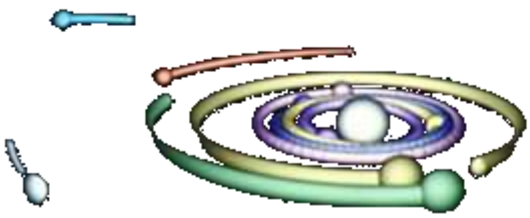
Quoi que l'on en dise, c'est tout de même **NEWTON** qui a apporté la plus grande contribution à la théorie de la gravitation universelle et à ses innombrables conséquences. En particulier, il a calculé :

- que la Terre devait être aplatie aux pôles, du fait de sa rotation diurne ;
- les inégalités de la Lune ;
- le phénomène des marées.

Concernant les comètes, **NEWTON** conclut qu'elles *se meuvent dans des sections coniques ... et qu'il sera bien difficile de ne pas conclure que les comètes sont des corps solides, compactes, fixes & durables, de même que les planettes*.

HALLEY, lui, ayant déduit des observations et de la théorie que les quatre grandes comètes parues, la première à la mort de Jules CÉSAR, la dernière en 1680, étaient en fait la même ; il en avait déduit, encore grâce à la théorie newtonienne, le retour pour avril 1759. Elle n'aura qu'un mois de retard, mais il ne l'aura pas vue. Elle est devenue « sa » comète ! À mettre également à l'actif de cette théorie, la découverte de Neptune (1846), grâce aux calculs de **LE VERRIER** tenant compte des perturbations qu'elle produit sur l'orbite d'Uranus découverte, elle, en 1781 par William **HERSCHEL** lors de sa deuxième « revue des cieux » et non par calcul.

Cette œuvre majeure de **NEWTON** a été la bible de la mécanique durant deux cents ans. Il y avait effectivement tout envisagé.



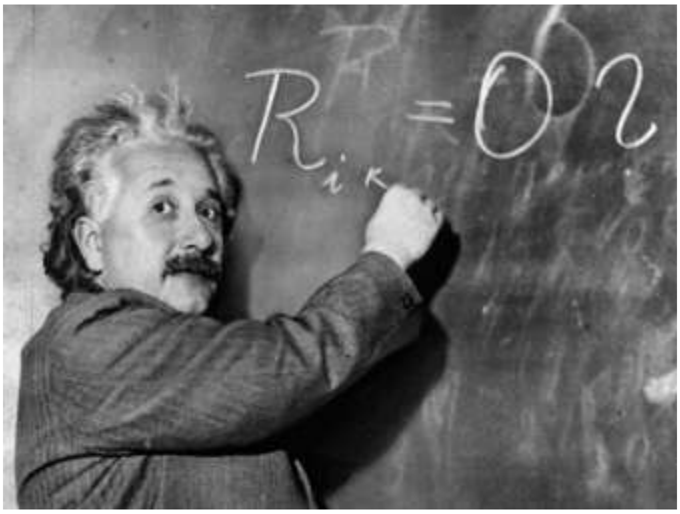
La gravitation : théorie en échec ?

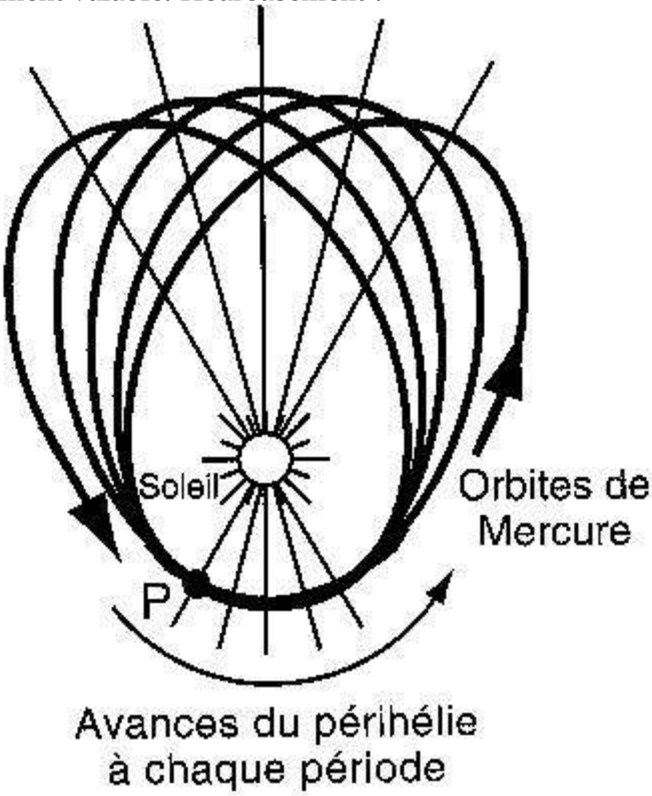
NEWTON a calculé l'avance du périgée de la Lune et son résultat est en accord avec l'observation. Quant à l'avance du périhélie des planètes, y compris Mercure, il la néglige.

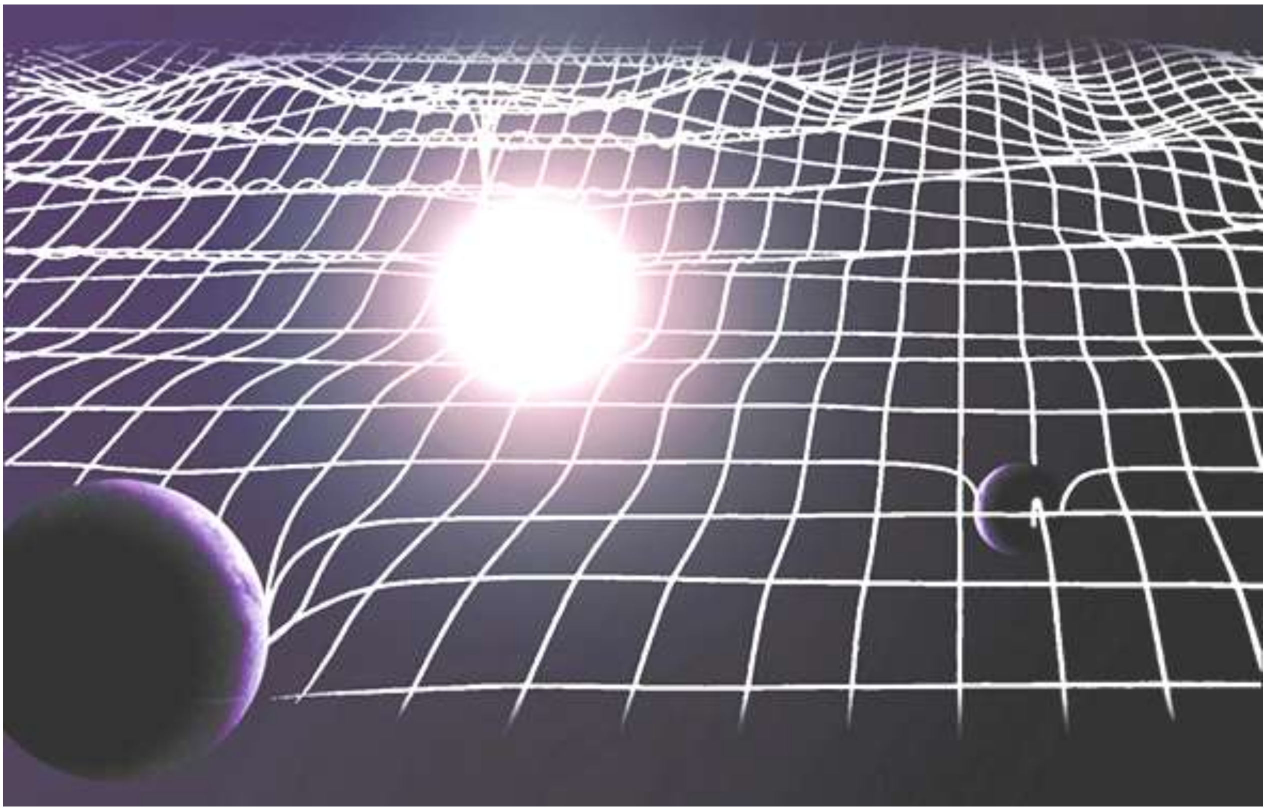
Plus tard, les calculs faits par **LE VERRIER** pour Mercure (toujours à partir de la théorie newtonienne), étaient en désaccord avec l'observation. Depuis 1915, nous en connaissons la raison : Mercure tourne suffisamment vite autour du Soleil pour que la relativité générale intervienne. Pour Mercure, le temps et l'espace ne sont déjà plus des grandeurs propres et indépendantes comme l'avait supposé **NEWTON**. Il en est de même pour les satellites du GPS, dont les logiciels tiennent compte d'**EINSTEIN**.

Il ne reste guère plus qu'à détecter les ondes gravitationnelles ... Pas facile ! À moins que la relativité générale elle-même ne soit remise en question !

Mais, dans nos expériences quotidiennes où les vitesses sont très faibles devant celle de la lumière, la mécanique newtonienne est toujours largement valable. Heureusement !



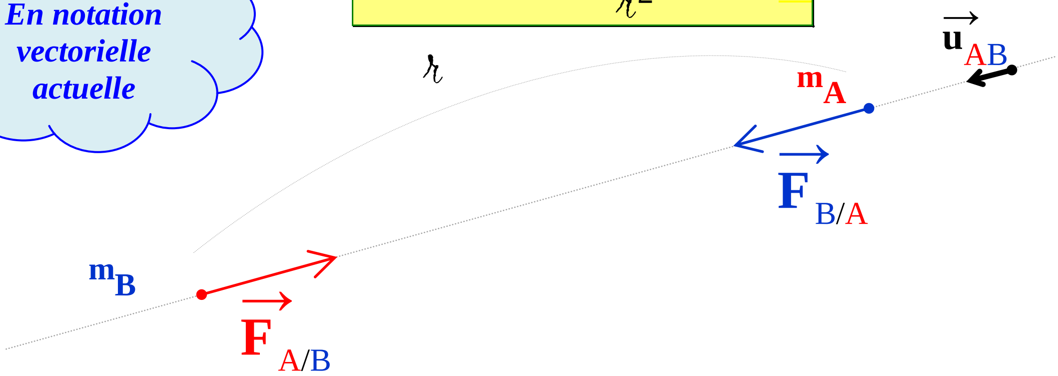




II. L'Interaction gravitationnelle de Newton

En notation vectorielle actuelle

$$\boxed{\vec{F}_{A/B} = -\,G\,\frac{m_A \times m_B}{r^2}\,\vec{u}_{AB}}$$



G = **6,67 428 76 × 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}** est la « ***constante de gravitation universelle*** ».

$\vec{F}_{A/B}$:
- ***direction*** = segment (**A**, **B**),
- ***sens*** = attraction gravitationnelle dirigée vers **A**,
- ***norme*** = $F_{A/B} = G\,\dfrac{m_A \times m_B}{r^2}$ en Newton (N).

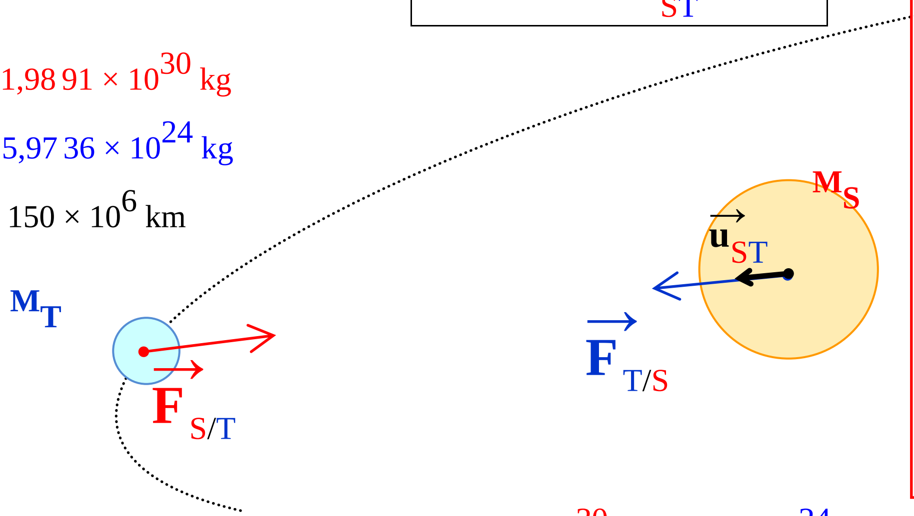
Conformément au **principe d'action réciproque** : $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$ soit $\vec{F}_{B/A} + \vec{F}_{A/B} = \vec{0}$

Exemples

- Système **Soleil** - **Terre** :

$$\boxed{\vec{F}_{S/T} = -\,G\,\frac{M_S \times M_T}{d_{ST}^2}\,\vec{u}_{ST}}$$

M_S = 1,98 91 × 10^{30} kg
M_T = 5,97 36 × 10^{24} kg
d_{ST} = 150 × 10^6 km



Le passage de masses ponctuelles au système d'astres nécessite de modéliser ceux-ci en ***sphères à répartition homogène*** : Ce sont alors les centres des sphères qui sont à considérer dans la loi de gravitation, auxquels on attribue la masse totale de chaque astre.
Par ailleurs, les calculs ne porteront que sur un **point « grave » extérieur à la sphère attractrice**.

$$F_{T/S} = F_{S/T} = \mathbf{6{,}67\,428\,76 \times 10^{-11}} \times \frac{1{,}9891 \times 10^{30} \times 5{,}9736 \times 10^{24}}{(150 \times 10^9)^2} = 3{,}52 \times 10^{22}\ \text{N}$$

$\vec{v}_L$

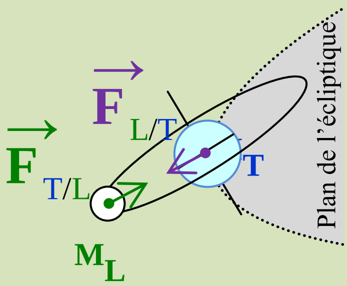
$\vec{F}_{T/L}$

Chute de la Lune sur la Terre

$M_T = 5{,}97\,36 \times 10^{24}$ kg
$M_L = 7{,}349 \times 10^{22}$ kg
$d_{ST} = 384 \times 10^3$ km

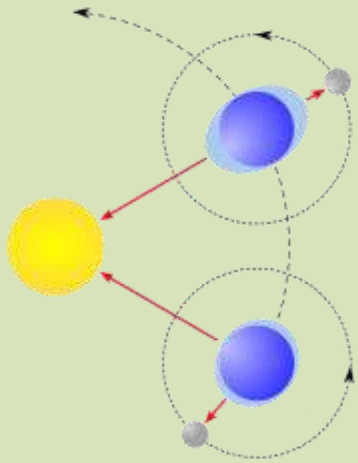
➢ **Système Terre – Lune**

$$\vec{F}_{T/L} = -\,G\,\frac{M_T \times M_L}{d_{TL}^2}\,\vec{u}_{TL}$$



d_{TL}

Les marées



$\vec{u}_{TL}$

$$F_{T/L} = F_{L/T} = 1{,}99 \times 10^{20}\ \text{N}$$

$$= 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{5{,}9736 \times 10^{24} \times 7{,}349 \times 10^{22}}{(384 \times 10^6)^2}$$

$\vec{F}_{L/T}$

➢ **Système Terre – pomme**

$$\vec{F}_{T/p} = -\,G\,\frac{M_T \times m_p}{(R_T + h_p)^2}\,\vec{u}_{Tp}$$

$\vec{F}_{T/p}$

$M_T = 5{,}97\,36 \times 10^{24}$ kg
$m_p = 0{,}10$ kg
$h_p = 1{,}0$ m

h_p

$$F_{T/p} = F_{p/T} = 4{,}0 \times 10^{13}\ \text{N}$$

$$= 6{,}67 \times 10^{-11} \times \frac{5{,}9736 \times 10^{24} \times 0{,}10}{(1{,}0)^2}$$

$\vec{u}_{Tp}$

R_T

III. Champ gravitationnel terrestre

1. *L'accélération gravitationnelle*

Selon la seconde loi de Newton $\overrightarrow{\mathbf{F}} = \mathbf{m}\,\overrightarrow{\mathbf{a}}$, recherchons l'accélération de la Lune et de la pomme :

$$\overrightarrow{\mathbf{F}}_{T/L} = -\mathbf{G}\,\frac{M_T \times M_L}{d_{TL}^2}\,\overrightarrow{\mathbf{u}}_{TL} = M_L\,\overrightarrow{\mathbf{a}}_L \qquad \overrightarrow{\mathbf{F}}_{T/p} = -\mathbf{G}\,\frac{M_T \times m_p}{(R_T + h_p)^2}\,\overrightarrow{\mathbf{u}}_{Tp} = m_p\,\overrightarrow{\mathbf{a}}_p$$

$$\overrightarrow{\mathbf{a}}_L = \frac{\overrightarrow{\mathbf{F}}_{T/L}}{M_L} = -\mathbf{G}\,\frac{M_T}{(R_T + h_L)^2}\,\overrightarrow{\mathbf{u}}_{TL} \qquad \overrightarrow{\mathbf{a}}_p = \frac{\overrightarrow{\mathbf{F}}_{T/p}}{m_p} = -\mathbf{G}\,\frac{M_T}{(R_T + h_p)^2}\,\overrightarrow{\mathbf{u}}_{Tp}$$

Á l'altitude « h », selon la verticale du lieu repérée par le vecteur unitaire « $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ » et quelle que soit sa valeur, une masse subit de la part de la Terre une ***accélération***,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{G}} = -\mathbf{G}\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2}\,\overrightarrow{\mathbf{k}} \qquad \text{soit} \qquad \mathcal{G} = \mathbf{G}\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2} \quad (\text{en N.kg}^{-1}).}$$

appelée « ***Champ gravitationnel terrestre*** ».

En ce lieu, cette accélération est commune à tout objet pesant « ***m*** » qui y subit alors l'Interaction gravitationnelle de la part de la Terre :

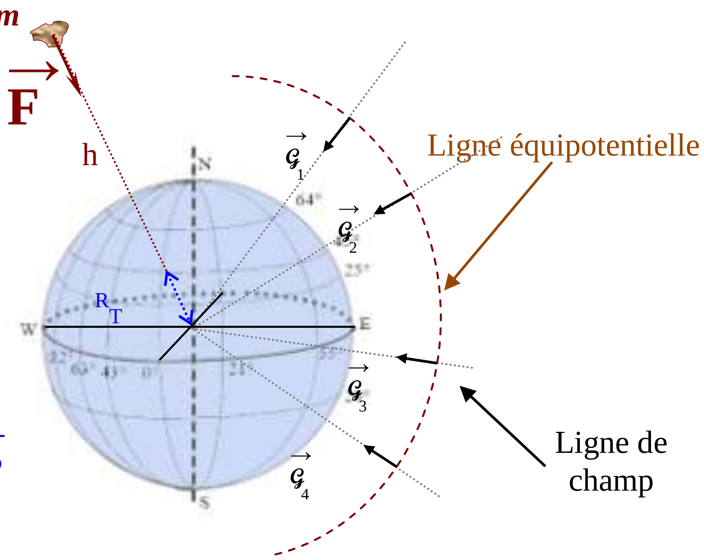
$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = m\,\overrightarrow{\mathcal{G}} = -\mathbf{G}\,\frac{m \times M_T}{(R_T + h)^2}\,\overrightarrow{\mathbf{k}}.$$

Le principe observationnel de la chute des corps en l'absence des actions exercées par l'air est respecté, puisque selon la seconde loi de Newton :

$$\overrightarrow{\mathbf{F}} = m\,\overrightarrow{\mathcal{G}} = m\,\overrightarrow{\mathbf{a}}$$

$\overrightarrow{\mathcal{G}} = \overrightarrow{\mathbf{a}}$: le **Champ gravitationnel terrestre** est le même pour toute masse disposée en un même lieu dans l'environnement de la Terre. Le mouvement ne dépend pas de la masse.

Á l'extérieur de la Terre, le champ gravitationnel terrestre est « **centripète** » Les ***lignes de champ*** sont radiales orientées vers le centre de la Terre.
Les ***équipotentielles***, lignes où le champ a le même potentiel, sont des cercles géocentriques ; Le champ gravitationnel croît à mesure que l'on se rapproche de la Terre.



2. *Variations du champ gravitationnel terrestre*

$$\mathcal{G} = \mathbf{G}\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \mathbf{G}\,\frac{M_T}{R_T^{\ 2}\,(1 + \frac{h}{R_T})^2} = \mathbf{G}\,\frac{M_T}{R_T^{\ 2}} \times \frac{1}{(1 + \frac{h}{R_T})^2}$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \times \frac{1}{(1 + \frac{h}{R_T})^2} = \mathcal{G}_0 \times (1 + \frac{h}{R_T})^{-2} \approx \mathcal{G}_0 \times (1 - 2\frac{h}{R_T})$$

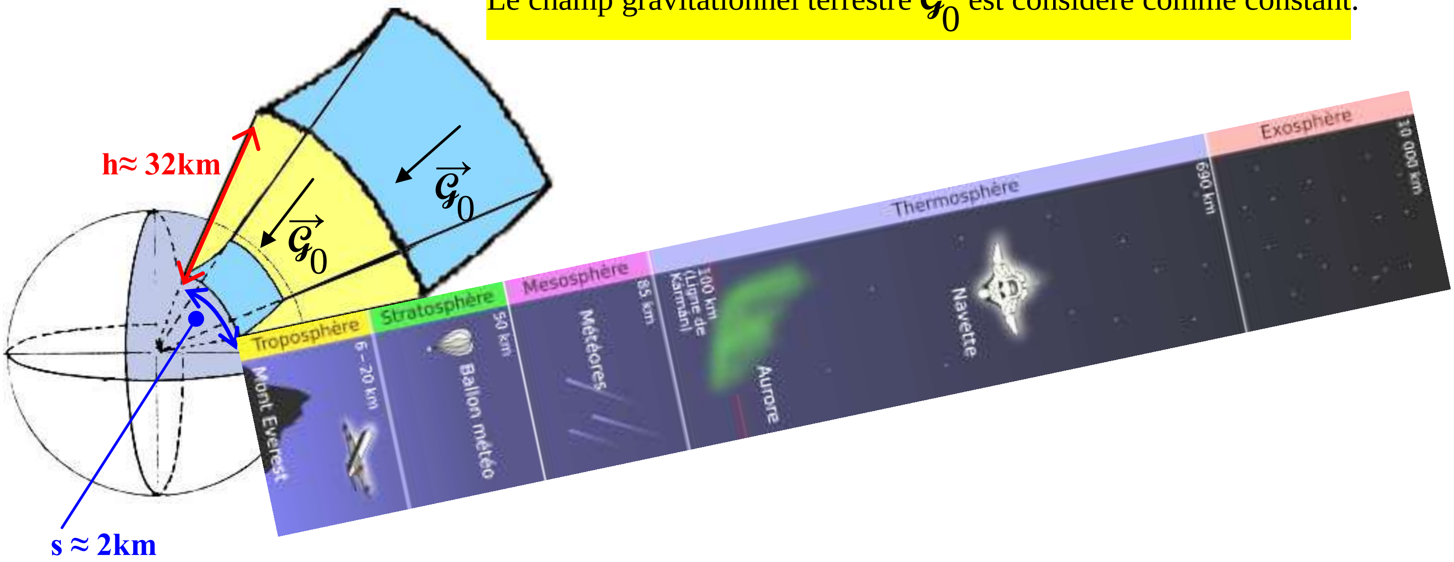
Ainsi, $\mathcal{G}$ diffère de $\mathcal{G}_0$ de 1 % lorsque : $\frac{2\,h}{R_T} = \frac{1}{100} \Leftrightarrow h = \frac{R_T}{200} = \frac{6\,378}{200} \approx 31{,}89$ km.

Et, $\mathcal{G}_0 = \mathbf{G}\,\frac{M_T}{R_T^{\ 2}} = \mathbf{6{,}67\,428\,76 \times 10^{-11}} \times \frac{5{,}9736 \times 10^{24}}{(6\,378{,}137 \times 10^3)^2} \approx 9{,}80\,06$ m.s^{-2} (ou N.kg^{-1}),

$\mathcal{G}_0 \approx$ **9,80 N.kg^{-1}** est le ***champ gravitationnel terrestre au sol*** (h = 0 m, le niveau de la mer).

Dans un angle solide, de **1′** (minute d'arc) d'ouverture depuis le centre de la Terre c'est-à-dire 1′ = 1°/60 = 0,016 6...° ⇔ **s = 1 mille = 1 852 m** sur un grand cercle de 40 000 km, de hauteur h ≈ 31,89 km depuis le niveau 0 de la mer,

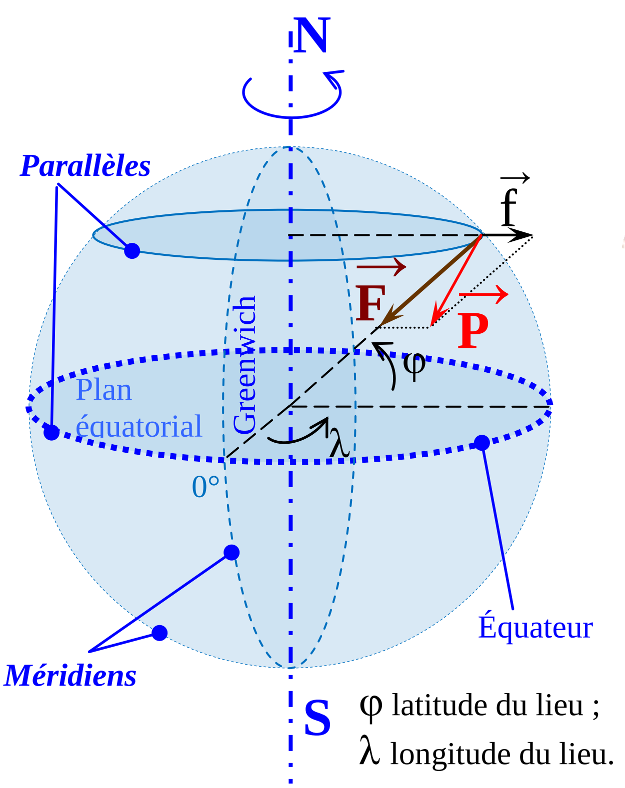
Le champ gravitationnel terrestre $\vec{\mathcal{G}}_0$ est considéré comme constant.

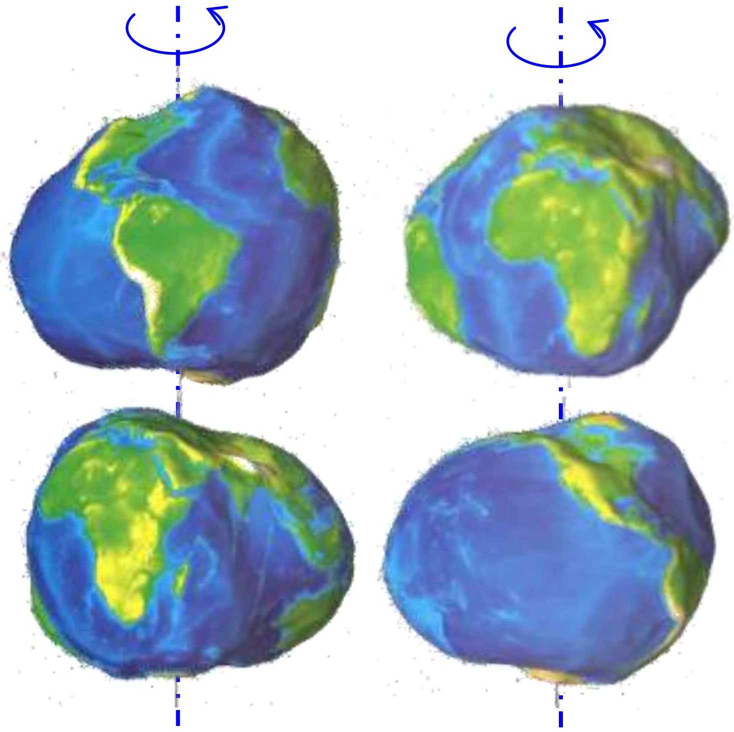


➢ **Force gravitationnelle et force de pesanteur (Poids)**

*Le **Poids** $\vec{P}$ est, la résultante de la **force gravitationnelle** $\vec{F}$ et de la **force centrifuge** $\vec{f}$ due à la rotation de la Terre (voir schéma ci-dessous). Cette **force de pesanteur** est la somme vectorielle des forces de **gravitation** et **centrifuge**. Elle n'est donc pas orientée exactement vers le centre de la Terre sauf aux pôles (où la force centrifuge est nulle).*
*Toutefois, la force centrifuge étant nettement plus faible que la force gravitationnelle, la force de pesanteur ou « **Poids** », est supposée verticale. « **g** » de $\vec{P} = m\,\vec{g}$, appelée « **accélération de la pesanteur** », dépend de l'altitude mais aussi de la latitude. Elle est considérée comme*

constante et sa valeur au niveau de la mer est ***9.81 m.s**$^{-2}$. *En fait la valeur de g (altitude zéro) croît de 9,78 m.s^{-2} à l'équateur, à 9,83 m.s^{-2} aux pôles et* $\vec{P} = m\,\vec{g}$.

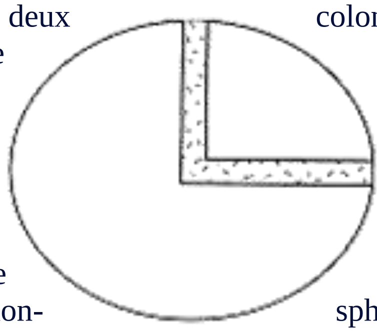




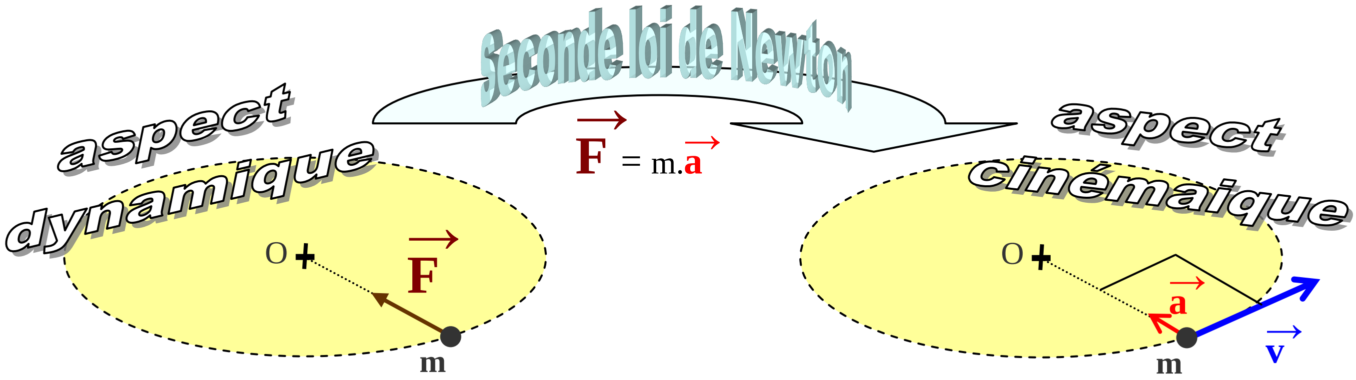
Le géoïde terrestre : *surface équigravitationnelle*

Si la Terre n'avait pas son mouvement journalier, elle serait parfaitement sphérique à cause de l'égale gravité de ses parties. Mais du fait de sa rotation, elle prend une forme ellipsoïdale. En 1687 **NEWTON** approfondit la question et précise son raisonnement : les mers, grâce leur mobilité, cèdent entièrement à la rotation diurne et ont immanquablement une figure aplatie ; mais puisque les terres émergées sont réparties uniformément à la surface du globe et ont à peu près partout la même altitude, la Terre solide doit avoir elle aussi une figure aplatie, identique à celle des eaux. On reconnaît le raisonnement de Kepler et comme ce dernier, **NEWTON** ajoute que ceci impose que la Terre solide ait été fluide à un moment donné de son histoire.

NEWTON cherche à calculer l'aplatissement de la Terre en supposant qu'elle soit fluide et homogène et en utilisant sa théorie de l'attraction universelle en $1/r^2$. Il se sert d'un procédé astucieux : il considère que deux colonnes fluides partant l'une du pôle et l'autre de l'équateur et se rejoignant au centre de la Terre doivent se faire équilibre. L'égalité du poids des deux colonnes implique que la colonne rejoignant l'équateur, dont la pesanteur est diminuée par la force centrifuge, soit plus longue que celle rejoignant le pôle. Pour son calcul, il doit déterminer l'attraction au pôle et à l'équateur d'un ellipsoïde de révolution, et c'est la première fois que l'attraction d'un corps non-sphérique est calculée. Il trouve un aplatissement de 1/230.



IV. Planètes et satellites



Mouvement à force centrale ⟶ Mouvement Uniforme, Vitesse constante V_0.

Lorsque seule, l'attraction gravitationnelle centripète produit le mouvement de **m**, il s'agit d'un mouvement « ***à force centrale*** » ou « ***à accélération centrale*** ». Ce mouvement est bien entendu « **plan** » et ici considéré comme ***circulaire*** : Le mouvement est circulaire uniforme ***MCU***. Quelle en est sa vitesse $\mathbf{V_0}$? Selon la seconde loi de Newton il vient :

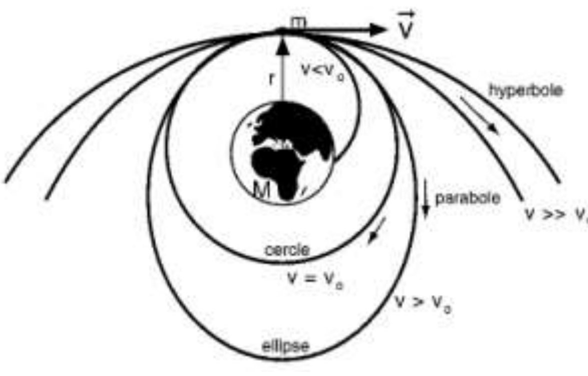
$$\vec{F} = m\,\vec{\mathcal{G}} = m\,\vec{a} \quad \text{soit} \quad \vec{\mathcal{G}} = \vec{a} \quad \text{c'est-à-dire} \quad G\frac{M}{r^2} = \frac{V_0^2}{r^2}, \quad \text{il vient alors} \quad V_0 = \sqrt{G\frac{M}{r}}$$

masse grave ***masse inertielle***

Sur une orbite déterminée, la vitesse est une caractéristique de l'astre attracteur – non du satellite -, elle décroît avec l'altitude mais ne dépend pas de la masse du satellite.

« *Vitesse de satellisation* » : $V_1 = \sqrt{G\frac{M_T}{R_T}} = 7{,}9\ \text{km.s}^{-1}$ pour la Terre (1ère vitesse cosmique).

« Vitesse de libération » : $V_2 = \sqrt{2}\,.\,V_1 = 11{,}2\ \text{km.s}^{-1}$ pour la Terre (2ème vitesse cosmique).



La **période de révolution** (3ème loi de Kepler) :

$$T = \frac{2\Pi r}{V} = \frac{2\Pi}{\omega} = \frac{2\Pi r}{\sqrt{G\frac{M}{r}}} = \sqrt{\frac{4\Pi^2 r^3}{GM}} \quad \text{ou encore,}$$

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\Pi^2}{GM} = \text{Cste} \quad \text{et enfin} \quad \omega = \frac{2\Pi}{T} = \sqrt{\frac{4\Pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}.$$

Pour un satellite « ***géostationnaire*** » (fixe par rapport à un point du sol et donc dans le plan équatorial),

$$\omega_0 = \frac{2\Pi}{T_0} = \frac{2\Pi}{24 \times 3600} = \frac{2\Pi}{86\,400} = 7{,}3 \times 10^{-5}\ \text{rad.s}^{-1}.$$

Alors $r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}} \approx 42\,000$ km du centre de la Terre ou ≈ 36 000 km d'altitude.
Les autres satellites sont « à défilement ».