**Lycée Galilée Gennevilliers**

# Le dipôle R, C série

## chap. 1

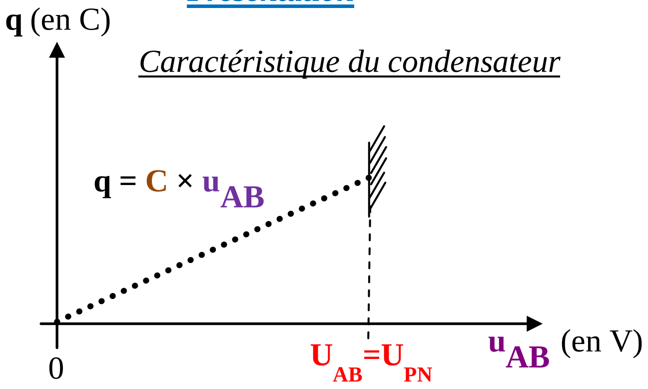
*Jallu Laurent*

# Le dipôle R, C série

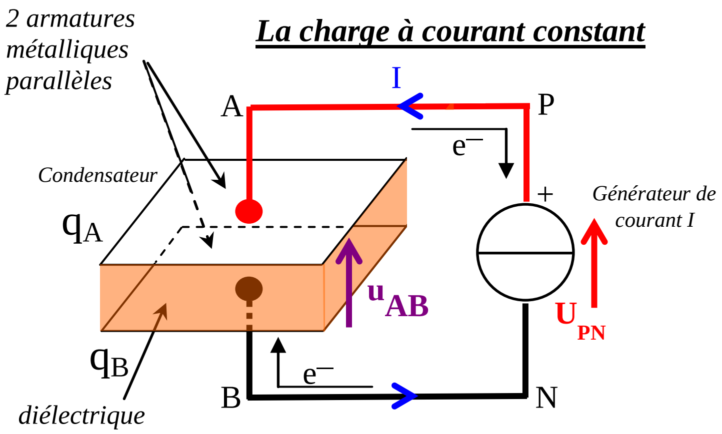
## I. Le condensateur

- ***Présentation***

*Caractéristique du condensateur*




***La charge à courant constant***




Lorsque **l'armature B** est soumise au potentiel négatif du générateur de courant, elle « condense » les électrons, sa charge est $q_B = n \times (-e)$ est négative (« $-e$ » est la charge de l'électron, « $e = 1{,}6\times10^{-19}$C » la charge élémentaire et « n » le nombre d'électrons).

**L'armature A** se charge « par influence » de la quantité d'électricité contraire « $q_A = -q_B$ » positive : l'arrivée d'un électron sur l'armature B provoque par répulsion électrostatique le départ d'un électron de l'armature A …

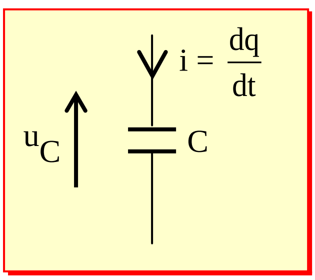
Il y a globalement ciculation d'électrons dans le circuit même si ceux-ci ne franchissent pas le diélectrique isolant. Cette circulation du courant est produite par le générateur de courant constant de sorte que $I = \left|\frac{\Delta q}{\Delta t}\right|$ = **constante** (Le débit des électrons est constant).

La tension aux bornes du condensateur augmente jusqu'à « **la tension de charge $U_{AB} = U_{PN}$** » lorsque le phénomène s'arrête.

La caractéristique du condensateur montre que lorsqu'il est soumis à une tension $u_{AB}$ alors la charge de son armature positive est $q = C \times u_{AB}$ où « C » est sa ***Capacité*** mesurée en « ***Farad*** » (**q** est en Coulomb et $u_{AB}$ en Volt**)**.

**info** : $C = \frac{\varepsilon\, S}{d}$ **S** ***surface d'une armature en m²***, **d** ***distance les séparant et*** **ε** ***constante diélectrique,*** $\varepsilon_0 = 8{,}85\ 10^{-12} = \frac{10^7}{4\pi c^2}$ **SI** ***celle du vide avec c vitesse de la lumière c*****=2,99 10⁸ m.s⁻¹ dans le vide.**

- ***Symbole***




Le condensateur condense les charges en fonction de sa capacité C. C est une constante positive caractéristique du condensateur qui ne dépend que de sa réalisation. Elle mesure « la quantité de Coulombs par Volt ($\frac{q}{u_C}$) » que stocke le condensateur. Il ne faut cependant pas dépasser la « ***tension de claquage*** » correspondant à une surcharge susceptible de percer le diélectrique par une étincelle.

*ex* :

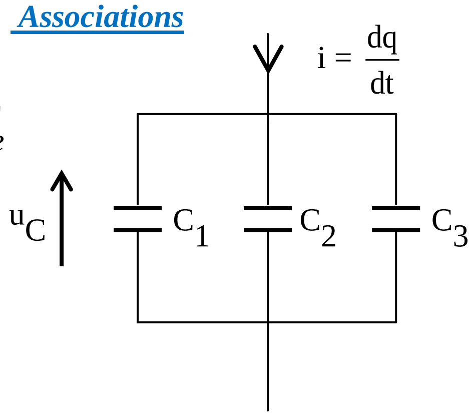
- $C = 1\mu F = 1\times10^{-6}$ F   stocke $q = 1\times10^{-6}$ C par Volt. Soient 2µC sous 2V, 10µC sous 10V …
- $C = 15nF = 15\times10^{-9}$ F   stocke $q = 15\times10^{-9}$ C par Volt. Soient 30nC sous 2V, 150nC sous 10V …
- $C = 22pF = 22\times10^{-12}$ F   stocke $q = 22\times10^{-12}$ C par Volt. Soient 44pC sous 2V, 110pC sous 5V …

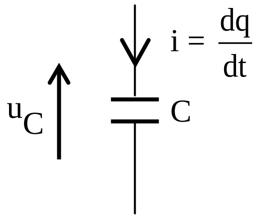
(*Rappel :* 1 C correspond à $\dfrac{1}{1{,}6 \,.\, 10^{-19}} = 0{,}63 \times 10^{-19}$ électrons).

- **Associations**

*Dipôles équivalents :*

*Capacité* **C** *plus grande*

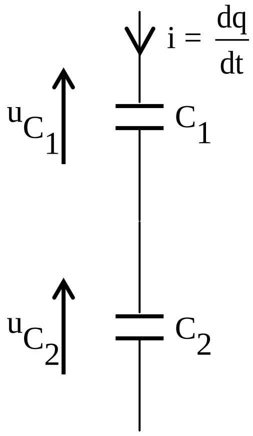


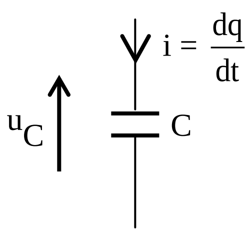




$$\boxed{\mathbf{C = C_1 + C_2 + C_3}}$$

*« On cumule les capacités ».*

*Capacité* **C** *plus petite*

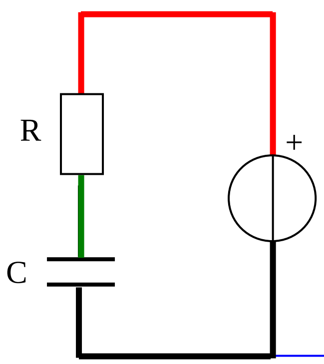


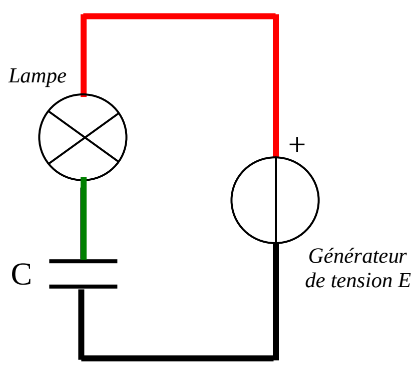

$$\boxed{\mathbf{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}}$$

*« On cumule les incapacités ».*

## II. Le dipôle R, C série

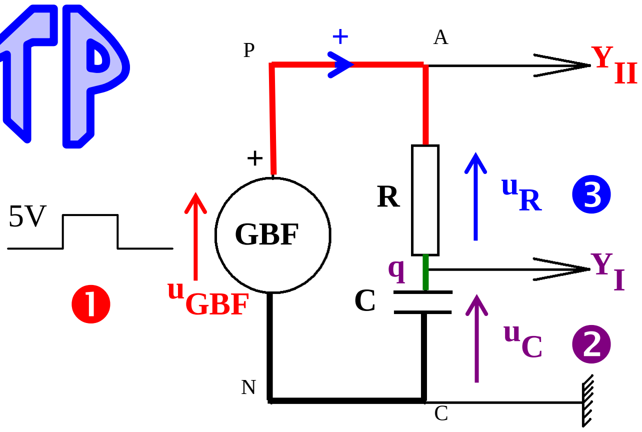



*Lors de l'établissement du courant dans un circuit comportant une lampe en série avec un condensateur, on constate un retard à l'allumage. Le système ainsi constitué a donc une évolution temporelle particulière. Les caractéristiques d'une lampe sont celles d'une résistance avec l'éclairement en moins. On étudie alors «* ***le dipôle R, C*** *»*



*pour comprendre le comportement précédent.*

- ***L'échelon de tension***

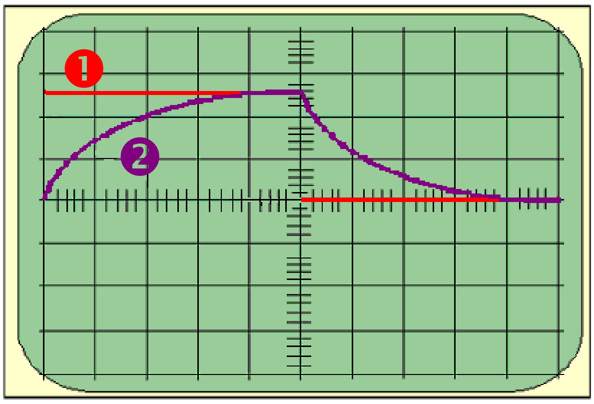


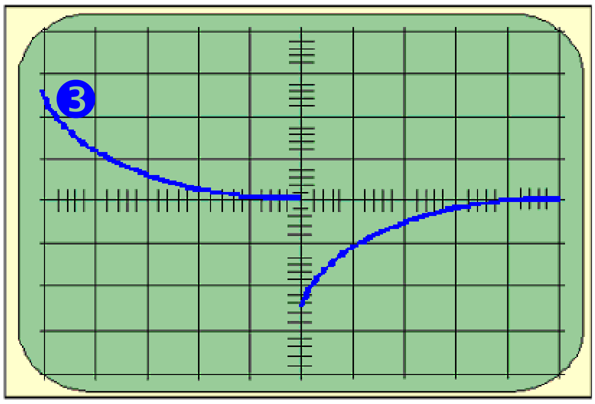

$u_R = R\,i$

$u_C = \dfrac{q}{C}$ *avec* $i = \dfrac{dq}{dt}$

$u_{GBF} = E$ *avec* $E = 0$ ou $5\ V$

$u_{GBF} = u_{PN} = u_{AC} = u_R + u_C$




On observe ce retard déjà évoqué, à l'établissement de la **tension $u_C$** ❷ ou à son extinction par rapport au **générateur $u_{GBF}$** en ❶.

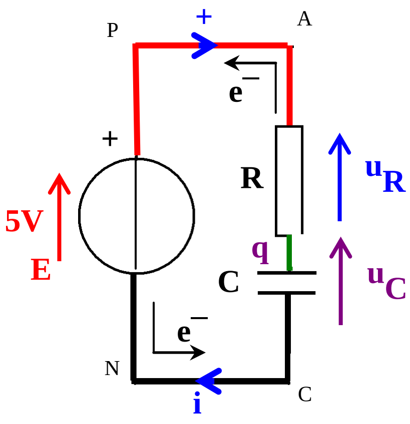
La **tension $u_R$** en ❸, ***image à R près du courant i circulant dans le circuit***, présente une discontinuité en changeant de signe qui reflète la présence du condensateur.

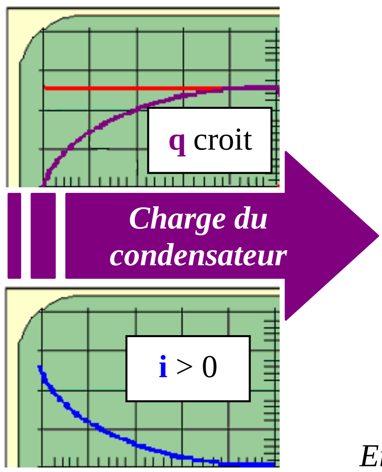
La tension aux bornes du condensateur suit celle imposée par le générateur mais avec une certaine « lenteur ». Le courant électrique présente cette même « lenteur » en plus du saut de discontinuité lorsqu'il change de sens. Au bout d'un certain temps il ne circule plus, hors les basculements du générateur.

- ***Interprétation microscopique***

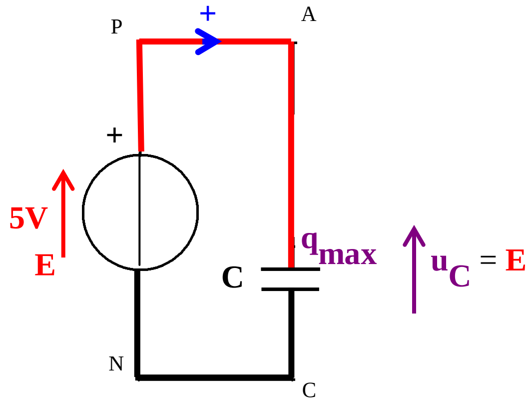
La **tension $u_C$** ❷ est l'image à 1/**C** près de la charge **q** du condensateur ($u_C = \dfrac{q}{C}$) :

- Lorsque la **tension $u_{GBF}$** en ❶ du générateur impose une circulation positive du **courant i** sous **5 V**, les électrons circulent en sens inverse et chargent le condensateur (parties gauches des oscilloscopes). Le courant est non nul. Il le devient lorsque les électrons ont fini de circuler, que le condensateur a atteint sa charge maximale sous la « ***tension de charge*** $u_{GBF}$ » désormais celle du




*Le condensateur se charge : Le temps nécessaire est fonction de la capacité* **C** *du condensateur, mais aussi de la résistance* **R** *qui « résiste » aux déplacements des électrons.*

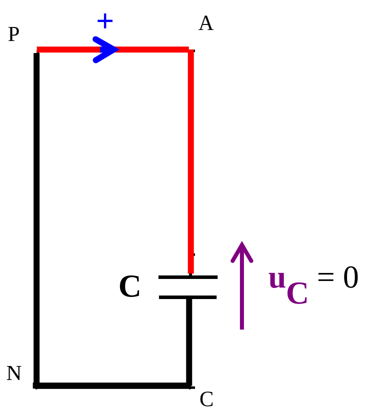


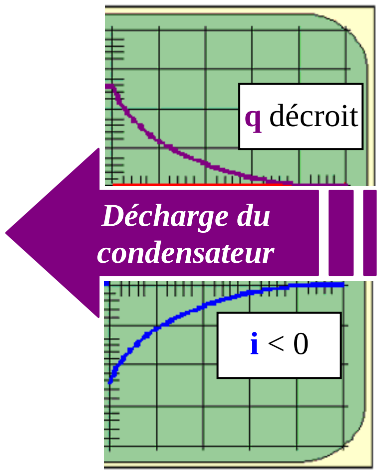

*En fin de charge la tension aux bornes du condensateur est non nulle, elle a rejoint la valeur imposée par le générateur. La tension nulle aux bornes de la résistance la rend inexistante.*

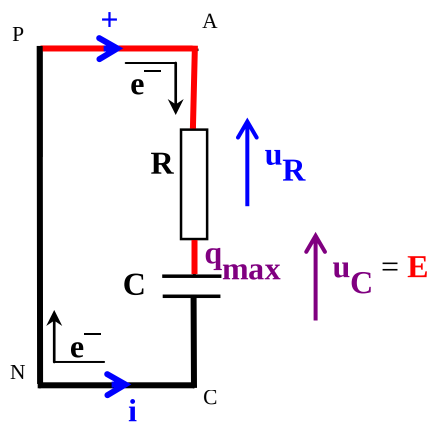
$$q_{max} = C \times E$$

condensateur ($u_R$ = **R i** = 0 puisque alors **i** = 0).

- Lorsque la **tension $u_{GBF}$** en ❶ du générateur bascule à **0 V** (parties droites des oscilloscopes) il s'efface laissant derrière lui un condensateur déséquilibré par les charges + $q_{max}$ et – $q_{max}$ de ses armatures respectives P et N. Les électrons stockés sur l'armature N ont devant eux une voie certes encombrée par la résistance, mais permettant le rééquilibre du condensateur. Ils se remettent en circulation mais dans le sens positif de circulation. Le **courant i**, précédemment nul, est brutalement restauré négativement jusqu'à sa prochaine extinction à la décharge complète du condensateur.



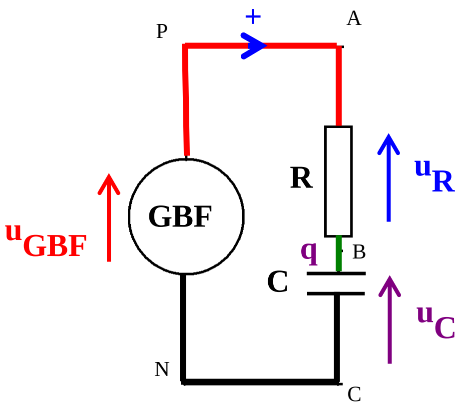




*En fin de décharge la tension aux bornes du condensateur est nulle, identique à celle du générateur. La tension est de nouveau nulle aux bornes de la résistance.*

*Le condensateur se décharge : Le temps nécessaire est fonction des mêmes capacité* **C** *et résistance* **R** *caractéristiques du circuit*

- ***Étude théorique***




$u_{PN} = u_{AC} = u_{AB} + u_{BC}$

$u_{GBF} = u_R + u_C$

Or $\quad u_R = R\,i \quad$ et $\quad u_C = \dfrac{q}{C}$

Donc $\quad u_{GBF} = R\,i + \dfrac{q}{C}$

Comme $\quad i = \dfrac{dq}{dt} \quad$ et $\quad u_{GBF} = E$,

À tout instant $\quad \boxed{E = R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{C}\,.}$

- *Équation différentielle du 1^er^ ordre en* $q(t)$ ;
- *Évolution temporelle de la charge* $q(t)$.

*Avec* **E = constante** (**5 V** *ou* **0 V**).

Solution algébrique

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = E/R \quad \text{ou} \quad \frac{dq}{dt} + \frac{q - CE}{RC} = 0.$$

pour information

$$y' + \frac{y}{RC} = 0 \iff y' = -\frac{y}{RC} \iff \frac{y'}{y} = -\frac{1}{RC}$$

$$\iff y = k\,e^{-\frac{x}{RC}}$$

*La fonction* $y(x)$ *est ici la charge* $q(t)$.

De la « CHARGE » : **E = 5 V**, Le condensateur est initialement déchargé $q(0) = 0$ C. Par ailleurs, $y = q - CE$.

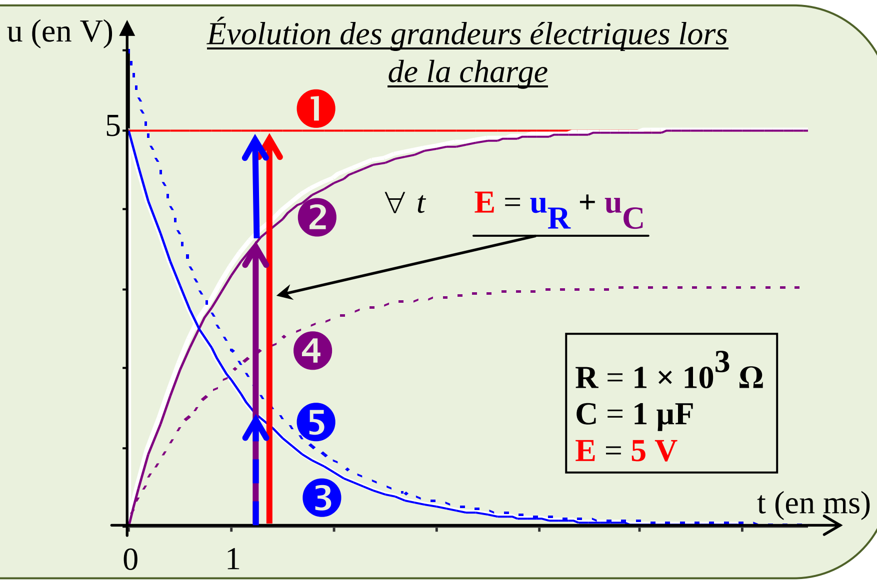
$$\Rightarrow q - CE = k\,e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{or} \quad q(0) - CE = k \quad \text{à } t = 0\text{ s, donc } k = -CE \quad \text{et}$$

❹ $q = C\,E\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

❷ $u_C = \dfrac{q}{C} = E\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

❺ $i = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{E}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}$

❸ $u_R = R\,i = E\,e^{-\frac{t}{RC}}$



de la « DÉCHARGE » : **E = 0 V**, Le condensateur est initialement chargé par la précédente tension de charge ($E_0 = 5\ V$) à $\mathbf{q}(0) = \mathbf{C}\, E_0$. Par ailleurs, $\mathbf{y} = \mathbf{q}$.

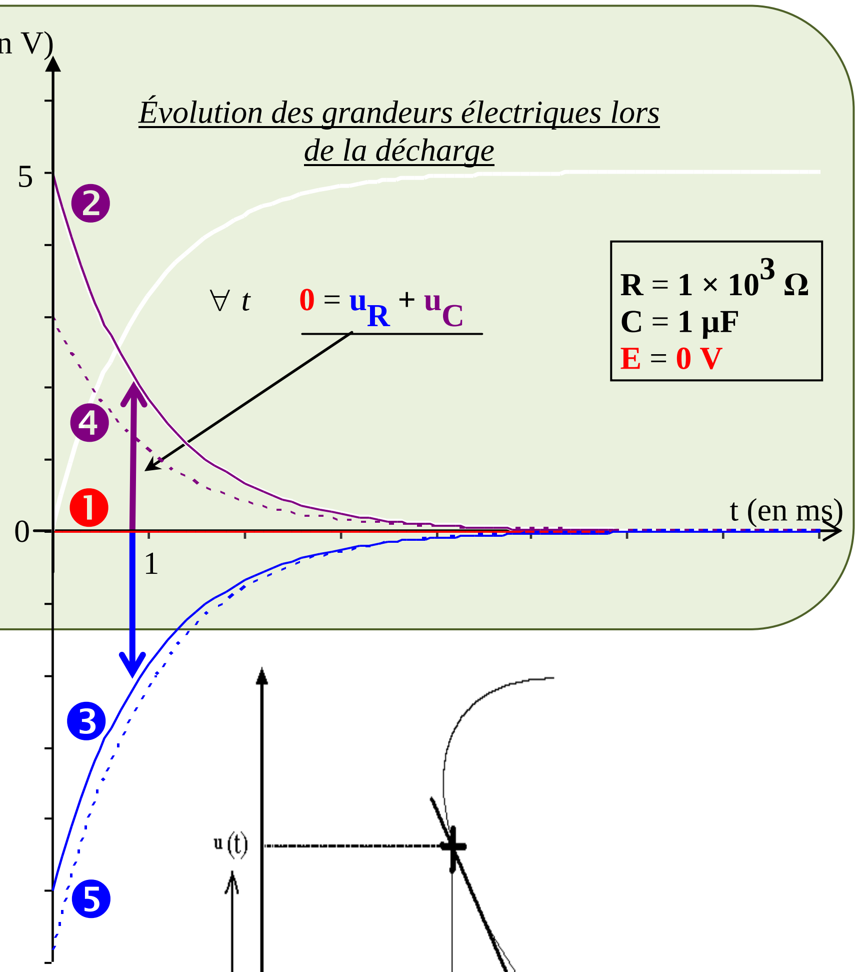
$$\Rightarrow \mathbf{q} = \mathbf{k}\, e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{or} \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{k} \text{ à } t = 0 \text{ s, donc } \mathbf{k} = \mathbf{C}\, E_0 \text{ et}$$

4 $\mathbf{q} = \mathbf{C}\, E_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$

2 $\mathbf{u_C} = \dfrac{\mathbf{q}}{\mathbf{C}} = E_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$

5 $\mathbf{i} = \dfrac{d\mathbf{q}}{dt} = -\dfrac{E_0}{\mathbf{R}}\, e^{-\frac{t}{RC}}$

3 $\mathbf{u_R} = \mathbf{R}\,\mathbf{i} = -E_0\, e^{-\frac{t}{RC}}$




Solution numérique

***Méthode D'Euler***

$$\mathbf{R}\,\frac{\Delta \mathbf{q}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{C}} = \mathbf{E}$$

*ou*
$$\frac{\Delta \mathbf{q}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{q} - \mathbf{CE}}{\mathbf{RC}} = 0.$$

$\mathbf{q}(t)$ *État de la charge à l'instant t.*

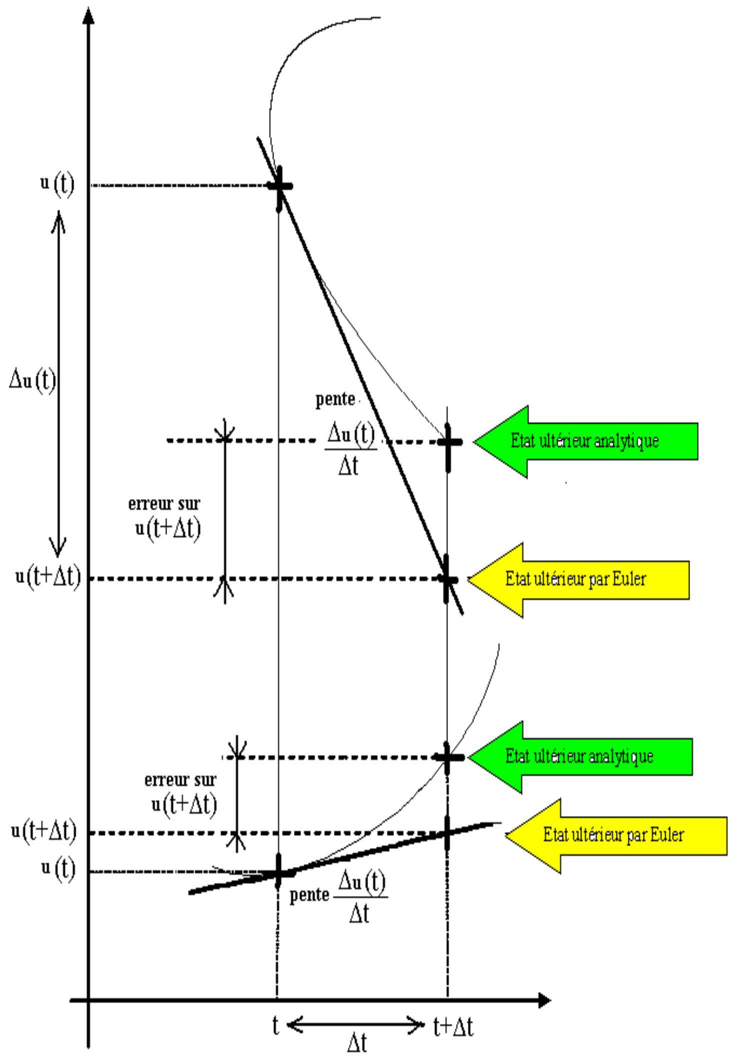
$$\Delta\, \mathbf{q}(t) = -\left(\frac{\mathbf{q}(t) - \mathbf{CE}}{\mathbf{RC}}\right)\Delta t$$

« *pas* » $\Delta t$

$$\mathbf{q}\,(t + \Delta t) = \mathbf{q}\,(t) + \Delta\, \mathbf{q}(t)$$

$$\Delta\, \mathbf{q}(t + \Delta t) = -\left(\frac{\mathbf{q}(t + \Delta t) - \mathbf{CE}}{\mathbf{RC}}\right)\Delta t$$

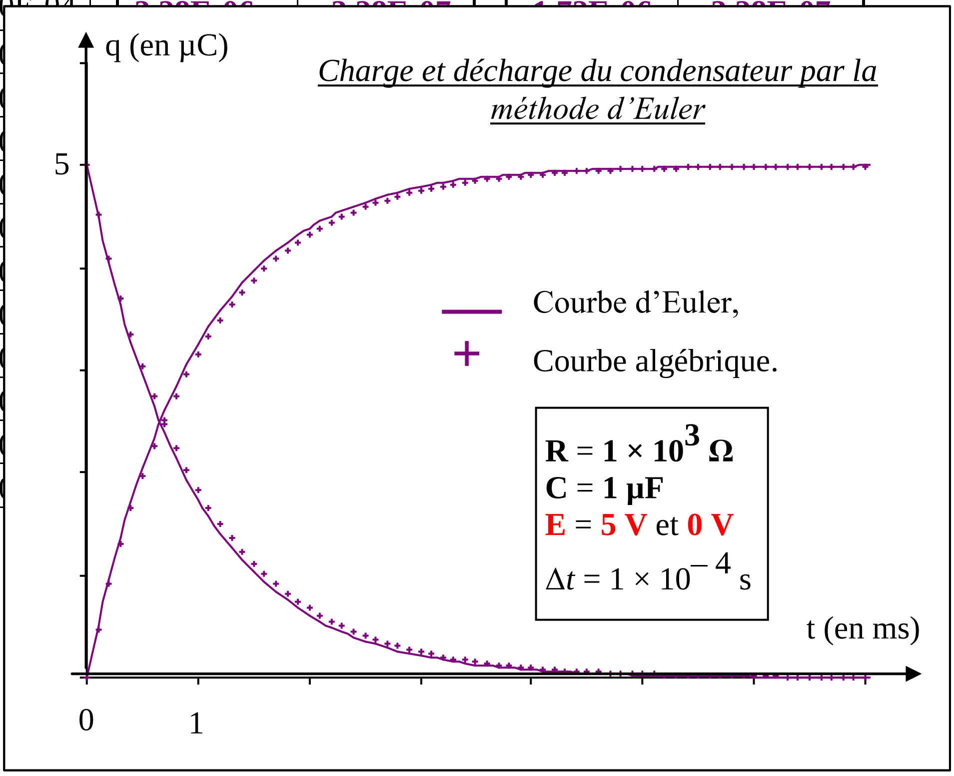
État de la charge $\mathbf{q}(t+\Delta t)$ à l'instant $t + \Delta t$.




**Avec** $\mathbf{q}\,(0) = 0$ et $\mathbf{E} = 5\ \mathbf{V}$ en Charge,
**et** $\mathbf{q}\,(0) = \mathbf{C}E_0$ et $\mathbf{E} = 0\ \mathbf{V}$ en Décharge,

**on obtient :**

| | | Décharge | | Charge | |
|---|---|---|---|---|---|
| **État** | ***t* en s** | **q(*t*) en C** | **Δq(*t*) en C** | **q(*t*) en C** | **Δq(*t*) en C** |
| **1** | 0,00E+00 | **5,00E-06** | **-5,00E-07** | **0,00E+00** | **5,00E-07** |
| **2** | 1,00E-04 | **4,50E-06** | **-4,50E-07** | **5,00E-07** | **4,50E-07** |
| **3** | 2,00E-04 | **4,05E-06** | **-4,05E-07** | **9,50E-07** | **4,05E-07** |
| **4** | 3,00E-04 | **3,65E-06** | **-3,65E-07** | **1,36E-06** | **3,65E-07** |
| **5** | 4,00E-04 | [illegible] | [illegible] | [illegible] | [illegible] |
| **6** | 5,0 | | | | |
| **7** | 6,0 | | | | |
| **8** | 7,0 | | | | |
| **9** | 8,0 | | | | |
| **10** | 9,0 | | | | |
| **11** | 1,0 | | | | |
| **12** | 1,1 | | | | |
| **13** | 1,2 | | | | |
| **14** | 1,3 | | | | |
| **15** | 1,4 | | | | |
| **16** | 1,5 | | | | |




*Remarques*

- $\boxed{u_{GBF} = u_R + u_C}$ est devenu $\boxed{E = R\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}}$.
On peut également établir comme $i = \frac{dq}{dt} = \frac{C\,du_C}{dt}$, $\boxed{E = RC\frac{du_C}{dt} + u_C}$ équation d'évolution de la tension aux bornes du condensateur et conduire une étude analogue de la précédente vers les mêmes conclusions …

- *Solution pratique* : Les expressions algébriques des différentes grandeurs électriques ne sont pas à retenir. Elles sont souvent données et ne demandent qu'à être vérifiées.

*Vérifions par exemple que* « $u_C = E\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ » *est bien solution de l'équation différentielle* « $E = R\,C\frac{du_C}{dt} + u_C$ ».

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{d\left[E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\right]}{dt} = \frac{E}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \times \; RC$$

$$+$$

$$u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \qquad \times \; 1$$

$$E\, e^{-\frac{t}{RC}} + E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = E.$$ *L'équation est bien vérifiée !*

## III. Constante de temps du dipôle R, C série

Quelle que soit la courbe observée, il apparaît clairement un comportement semblable des différentes grandeurs électriques. Elles varient durant un certain temps puis deviennent constantes. Ceci permet de distinguer deux « ***régimes de fonctionnement*** » : « ***Le régime transitoire*** » durant lequel ces grandeurs varient, et « ***le régime permanent*** » où elles sont constantes.

| | **Charge** | **Décharge** |
|---|---|---|
| **Régime transitoire** | **q** croît de 0 à CE,<br>$\mathbf{u_C}$ croît de 0 à E,<br>**i** positive décroît de $\frac{E}{R}$ à 0,<br>$\mathbf{u_R}$ décroît de E à 0. | **q** décroît de CE à 0,<br>$\mathbf{u_C}$ décroît de E à 0,<br>**i** négative croît de $-\frac{E}{R}$ à 0,<br>$\mathbf{u_R}$ croît de – E à 0. |
| **Régime permanent** | **q** = $q_{max}$ = CE,<br>$\boxed{\mathbf{u_C = E}}$,<br>**i** = 0,<br>$\mathbf{u_R}$ = 0. | $\mathbf{q_a}$ = 0,<br>$\boxed{\mathbf{u_C = 0}}$,<br>**i** = 0<br>$\mathbf{u_R}$ = 0 |

- Charge et décharge sont physiquement semblables. Les caractéristiques **R** et **C** sont identiques dans les deux cas. Cependant, il est intéressant de remarquer que les régimes permanents des charge et décharge, lorsque le courant ne circule plus, ne diffèrent que par la tension aux bornes du condensateur. Chargé, celui-ci se comporte comme un véritable générateur susceptible de générer une circulation de courant lorsque le circuit extérieur est fermé.

- L'évolution temporelle de la charge **q** (t) contient les expressions des régimes transitoire et permanent : Puisqu'à tout instant $\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{RC}} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{R}}$,

↳ le régime permanent est atteint lorsque **q** est constante et $\frac{d\mathbf{q}}{dt} = 0$, alors $\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{C}} = \mathbf{E}$ et « **q** = **CE** » (charge **E** = 5V, décharge **E** = 0V).

↳ le régime transitoire dure tant que le facteur $\frac{d\mathbf{q}}{dt}$ est non négligeable devant $\frac{\mathbf{q}}{\mathbf{RC}}$.

- ***Définition*** : On appelle « ***constante de temps*** » du dipôle R, C série, le produit de sa résistance R par sa capacité C.

$$\boxed{\tau = R \times C}$$

(en s) (en Ω) (en F)

- $\tau$ est un temps, fonction des seules caractéristiques du dipôle : En effet, par « ***analyse dimensionnelle*** »,

$$[\,\tau\,] = [\,RC] = [\,R\,]\,[C] = [\,\frac{u}{i}\,]\,[\,\frac{q}{u}\,]$$

« *dimension de tau égale …* »

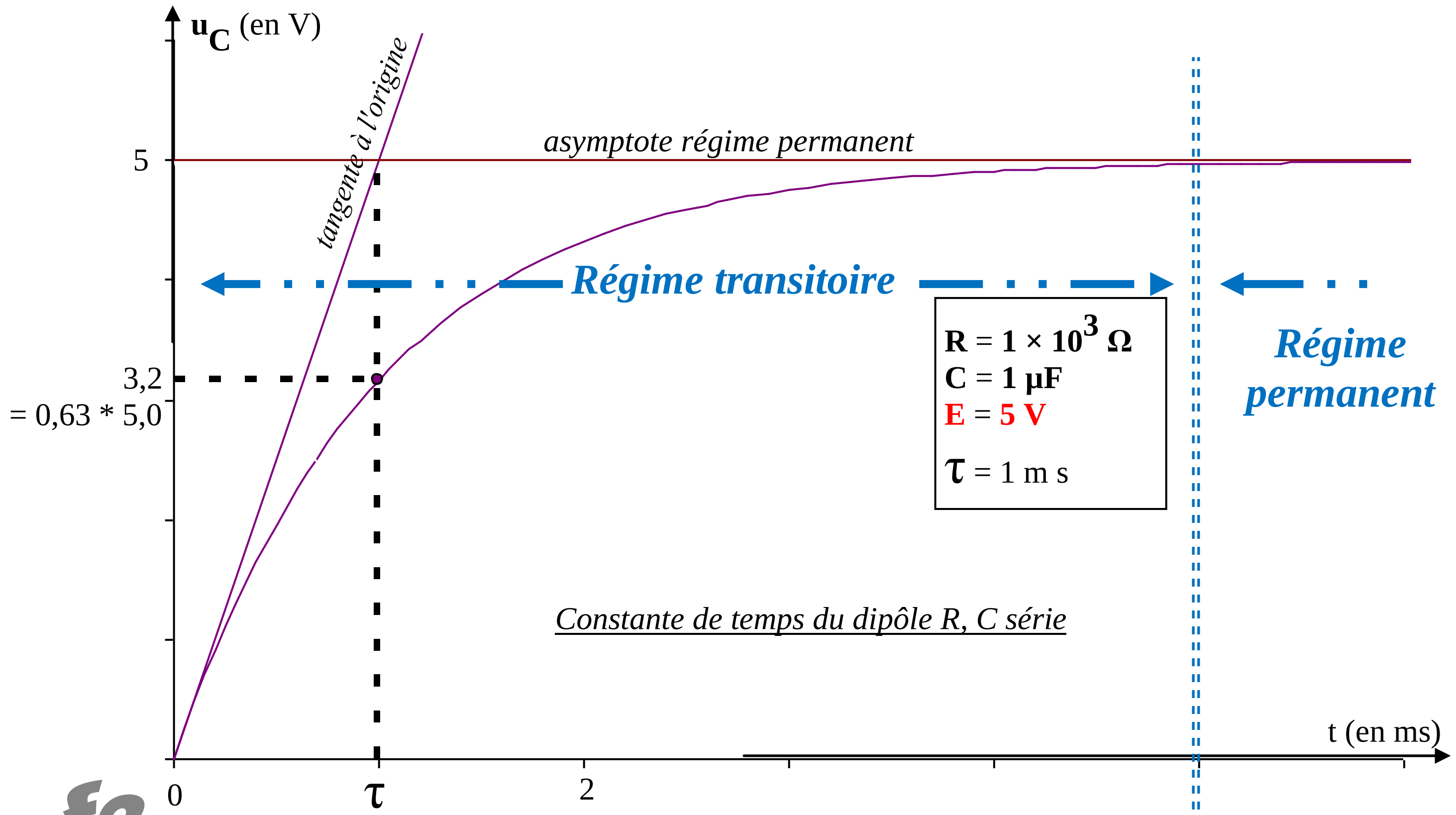
$$= \frac{u}{i}\,\frac{q}{u} = \frac{q}{i} = \frac{q}{\left[\frac{dq}{dt}\right]} = \frac{q\ \ dt}{dq}$$

$[\,\tau\,] = dt = \mathbf{T}$ $\quad\tau$ *est un temps.!*

ou par l'équation différentielle, $\frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{RC}} = \mathbf{E} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\mathbf{q}}{\boldsymbol{\tau}}$ dont chacun des termes est homogène à une tension et donc $\tau$ à un temps.

- À t = $\tau$, $e^{-\frac{t}{RC}} = e^{-1} = 0{,}37$. ***À cet instant, le condensateur est à* (1 – 0,37) = *63 % de sa charge totale ou il lui reste 37 % en décharge***. Ce n'est qu'au bout d'environ 5$\tau$, que le régime permanent est atteint $(1 - e^{-5}) = 99$ %.

- $\tau$ peut être déterminé graphiquement :




***tangente*** :

$$y = a\,x + b = a\,x = \left( E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \right)'_{t=0} x = \left( \frac{E}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}} \right)_{t=0} x = \frac{E}{RC}\, x = E \text{ (à } x = RC = \tau\text{).}$$

*Raisonnement analogue en décharge.*

## Annexe — Énergie du condensateur

à un instant t, l'énergie électrique aux bornes du condensateur est :

$$E_C = \int_0^t P\,dt = \int_0^t u_C\ i\,dt = \int_0^t \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}\,dt = \frac{1}{C}\int_0^t q\,dq = \left.\frac{q^2}{2C}\right|_0^t = \frac{q(t)^2}{2C} - \frac{q(0)^2}{2C}$$

avec P la puissance électrique du condensateur.

Au terme de la charge d'un condensateur initialement déchargé, l'énergie emmagasinée par le condensateur est $E_C = \frac{q_{max}^2}{2C} = \frac{C\,E^2}{2}$.

À la fin d'une décharge totale d'un condensateur, l'énergie libérée est $E_C = -\frac{q_{max}^2}{2C} = -\frac{C\,E^2}{2}$.

Globalement à un instant quelconque : $\boxed{\mathbf{E_C(t) = \frac{q(t)^2}{2C} = \frac{C\,u_C^2(t)}{2}}}$.